INFLUENCIA DEL CAMPO GRAVITATORIO EXTERNO DEL UNIVERSO DE GÖDEL SOBRE EL ESPECTRO ENERGETICO DE PARTICULAS ESCALARES

Aníbal Páuyac Huamán[1]

RESUMEN

En el campo gravitatorio externo del universo de Gödel con simetría cilíndrica se hallan soluciones exactas de la ecuación del campo escalar y el espectro energético de las partículas escalares correspondientes. Se analizan dos casos. En el primero, las partículas se encuentran bajo la acción solamente del campo gravitatorio externo. En el otro, las partículas interactúan con un campo electromagnético externo, el cual a su vez está dentro del campo gravitatorio externo del universo de Gödel. La solución de la ecuación del campo escalar se expresa mediante los polinomios de Jacobi. El espectro energético de las partículas escalares resulta discreto debido a la rotación del universo.

Palabras clave: gravitación, universo de Gödel, espectro energético, campo escalar, campo electromagnético.

ABSTRACT

In the external gravitational field of the Gödel universe with cylindrical symmetry, exact solutions of the scalar field equation and energy spectrum of the corresponding scalar particles are obtained. First, we considered the scalar particles only in an external gravitational field of the Gödel universe. Then, we considered the particles interacting with an external electromagnetic field, which is at the same time in the external gravitational field of the Gödel universe. The solution of the scalar field equation is obtained in the form of Jacobi polynomials. The energy spectrum of scalar particles proves to be discrete, due to rotation of the universe.

Key words: gravitation, Gödel universe, energy spectrum, scalar field, electromagnetic field.

INTRODUCCION

La métrica de Gödel es la solución de las ecuaciones de Einstein cuando el tensor energía-impulso describe un fluido ideal en rotacion [1].

Según la hipótesis actualmente aceptada, vivimos en un universo en expansión, para el cual la métrica de Fridman constituye una buena aproximación. Sin embargo, nada nos impide suponer que nuestro universo, a la vez que se expande, también gira. Así como se observa el corrimiento al rojo en el universo de Fridman, podrían observarse efectos similares en el universo de Gödel, tales como la manifestación de algún tipo de fuerza centrífuga u otros [2]. El análisis de un universo que al mismo tiempo rota y se expande [3] resulta muy complejo. Por eso, en el presente trabajo se analizan los efectos de la rotación pura, considerando que estos se manifiestan independientemente de la expansión.

Una característica no muy buena del universo de Gödel es la existencia en ella de geodésicas tipo temporal cerradas, lo que implica la violación del principio de causalidad [4]. Por ello el problema planteado en este trabajo debe ser considerado no más que como un modelo, que sin embargo resulta muy interesante por la sencillez de la métrica y por los resultados que se obtienen.

En el presente trabajo se investiga la influencia del campo gravitatorio externo del universo de Gödel en el espectro energético de partículas escalares. Se analizan dos casos. En el primer caso, las partículas se encuentran bajo la acción solamente del campo gravitatorio externo. En el segundo caso, las partículas se encuentran en un campo electromagnético externo, el cual a su vez se encuentra en el campo gravitatorio externo. A diferencia de [5, 6] se toma una métrica con simetría cilíndrica, que corresponde a un análisis con mayor sentido físico.

Campo escalar dentro del campo gravitatorio externo del universo de Gödel con simetría cilíndrica

Escogemos la métrica de la siguiente forma [4]:

$$ds = dt^2 - dr^2 + \frac{2}{\Omega^2}\left[sh^4\frac{\Omega r}{\sqrt{2}} - sh^2\frac{\Omega r}{\sqrt{2}}\right]d\phi^2 - \frac{4}{\Omega}sh^2\frac{\Omega r}{\sqrt{2}}d\phi dt - dz^2$$

(1.1)

El lagrangiano del campo escalar tiene la forma

$$L = \overset{*}{\varphi}_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} - m^2\overset{*}{\varphi}\varphi \quad (1.2)$$

Variando respecto al campo $\overset{*}{\varphi}$ obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{,\beta} + m^2\varphi = 0 \quad (1.3)$$

Busquemos la solución en la forma

$$\varphi(t,r,\phi,z) = v(r)e^{i(n\phi+kz-\omega t)}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad (1.4)$$

Sustituyendo (1.4) en (1.3), obtenemos una ecuación para v(r) que, haciendo el cambio de variables

[1] Departamento de Física Teórica, Universidad Rusa de la Amistad de los Pueblos, Miklukho-Maklaya St. 6, Moscow 117198, Russia

$$\xi = ch\sqrt{2}\Omega r, \quad v(r) \to u(\xi) \qquad (1.5)$$

se transforma en

$$u'' + \frac{2\xi}{\xi^2 - 1}u' + \frac{u}{\left(\xi^2-1\right)^2}\left[A\xi^2 + 2B\xi + D\right] = 0 \qquad (1.6)$$

Donde

$$A = -\frac{\omega^2}{2\Omega^2} - \frac{k^2+m^2}{2\Omega^2}, \qquad 2B = \frac{2\omega^2}{\Omega^2} + \frac{2n\omega}{\Omega},$$

$$D = -\frac{3\omega^2}{2\Omega^2} - \frac{2n\omega}{\Omega} - n^2 + \frac{k^2+m^2}{2\Omega^2}.$$

La ecuación (1.6) es una ecuación generalizada de tipo hipergeométrico [7]. El procedimiento para resolverla es conocido. Se hace u(ξ)=f(ξ)y(ξ), se sustituye u(ξ) en (1.6), se ordenan los términos formando una ecuación respecto a y(ξ) "para una determinada f(ξ)", y se elige f(ξ) de tal modo que la ecuación para y(ξ) sea también una ecuación generalizada de tipo hipergeométrico.

De este modo, y exigiendo adicionalmente la integrabilidad cuadrática de la función del campo escalar, obtenemos para f:

$$f = \left(\xi - 1\right)^{\frac{n}{2}}\left(\xi + 1\right)^{\left(-\frac{\omega}{\Omega} - \frac{n}{2}\right)} \qquad (1.7)$$

La ecuación para y(ξ), haciendo el cambio

$$\xi = 1 - 2s \quad y(\xi) \to \chi(s)$$

y eligiendo unas constantes α, β, γ adecuadamente, se reduce a la ecuación de Gauss [7]:

$$s(1-s)\chi'' + \left[\gamma - (\alpha+\beta+1)s\right]\chi' - \alpha\beta\chi = 0 \qquad (1.8)$$

Esta ecuación tiene la forma: $\sigma_o\chi'' + \tau_o\chi' + \lambda_o\chi = 0$,
Donde

$$\sigma_o = s(1-s), \quad \tau_o = \gamma - (\alpha+\beta+1)s, \quad \lambda_o = -\alpha\beta$$

Su solución se expresa como la superposición de dos funciones hipergeométricas linealmente independientes [7]:

$$\chi(s) = C_1F(\alpha,\beta,\gamma,s) + C_2 s^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,s)$$

Pero, la exigencia de que la energía total del campo escalar sea finita, conduce a que las funciones hipergeométricas degeneren en polinomios hipergeométricos. Con un cambio de variables adicional, el cual es q=2s-1,

$\chi(s) \to \theta(q)$ estos polinomios toman la forma de los polinomios de Jacobi [7]:

$$\theta(q) = P_N^{(a,b)}(q), \quad N=0, 1, 2, ... \qquad (1.9)$$

donde

$$a = -\frac{4\omega}{\Omega} - 2n - 3, \qquad b = 1 + 2n.$$

De este modo, u(ξ)=f(ξ)y(ξ), donde y(ξ) son los polinomios de Jacobi de grado N.

Los polinomios de Jacobi se obtienen bajo la condición:

$$\lambda_o = \lambda_N = -N\tau_0' - \frac{N(N-1)}{2}\sigma_o'' \qquad (1.10)$$

Sustituyendo las expresiones correspondientes en (1.10), obtenemos

$$\omega = \Omega\left\{1 + 2N \pm \left[(1+2N)^2 + \frac{k^2+m^2}{\Omega^2} - 2N(N+1)\right]^{1/2}\right\} \quad N=0,1,2... \qquad (1.11)$$

Al calcular la energía $E = \int T_o^o\sqrt{-^3g}\,dV$, se pueden elegir las constantes de integración de tal modo que E=ω. Por tanto, la expresión (1.11) representa el espectro energético de las partículas escalares. Como se ve, este espectro es discreto. Pero, si la velocidad de rotacion del universo Ω=0, el espectro se hace continuo. Por tanto, el campo gravitatorio externo del universo de Gödel influye en el espectro energético de las partículas escalares, haciéndolo discreto.

Campo escalar en un campo electromagnético externo que a su vez se encuentra en el campo gravitatorio externo del Universo de Gödel con simetría cilíndrica

En este caso la métrica será la misma que en el caso anterior, es decir, estará dada por (1.1). El lagrangiano que describe la interacción de los campos escalar y electromagnético, siendo el último externo, está dado por [8]:

$$L = \overset{*}{\varphi}_{,\alpha}\varphi^{\alpha} - m^2\overset{*}{\varphi}\varphi - F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + ie\left[\overset{*}{\varphi}\varphi_{,\alpha} - \overset{*}{\varphi}_{,\alpha}\varphi\right]A^{\alpha} + e^2\overset{*}{\varphi}\varphi A^{\alpha}A_{\alpha} \qquad (2.1)$$

Por cuanto el campo electromagnético es externo, variaremos sólo respecto a $\overset{*}{\varphi}$. Entonces obtenemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{,\beta} + m^2\varphi - 2ei\varphi_{,\alpha}g^{\alpha\beta}A_{\beta} - e^2\varphi A_{\alpha}A^{\alpha} = 0 \qquad (2.2)$$

Para $F^{\alpha\beta}$ tenemos la ecuación de Maxwell en un campo gravitatorio externo:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\,F^{\alpha\beta}\right)_{,\beta} = j^{\alpha} \qquad (2.3)$$

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$$

Escojamos el tetravector j^{α} en la forma $j^{\alpha} = (j^0, 0, 0, 0)$, donde j^0 es una constante. Además, debido a la simetría cilíndrica, supondremos que todas las magnitudes dependen solamente de r. Entonces, para $F_{\alpha\beta}$ y A^{α}, eligiendo adecuadamente las constantes de integración, obtenemos

$$F_{21} = \frac{\Omega I sh\sqrt{2}\Omega r}{\sqrt{2}}, \quad A^2 = \frac{I\Omega^2}{ch\sqrt{2}\Omega r + 1},$$

donde $I = \frac{j^0}{2\Omega^3}$. (2.4)

Las demás componentes son iguales a cero.

Busquemos la solución para φ en la forma:

$$\varphi(t,r,\phi,z) = v(r)e^{i(n\phi + kz - \omega t)}, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (2.5)$$

Sustituyendo (2.4) y (2.5) en (2.2) obtenemos una ecuación respecto a v(r), que, haciendo el cambio de variables (1.5), se convierte en la misma ecuación (1.6), sólo que con otras constantes A, B y D. Por tanto, para resolverlo seguiremos el mismo procedimiento que en el caso anterior, en particular haremos u(ξ)=f(ξ)y(ξ). De ese modo, para f(ξ) obtenemos

$$f = C(\xi - 1)^{\frac{n}{2}}(\xi + 1)^{\left(-\frac{n}{2} - \frac{\omega}{\Omega} + \frac{eI}{2}\right)}, \qquad (2.6)$$

La función y(ξ) se reduce a los polinomios de Jacobi, los cuales se obtienen cuando se cumple (1.10). Sustituyendo las expresiones correspondientes en (1.10) obtenemos

$$\omega = \Omega\left\{1 + 2N \pm \left[(1+2N)^2 + \frac{k^2 + m^2}{\Omega^2} - eI(1+2N) - 2N(N+1)\right]^{1/2}\right\} \qquad (2.7)$$

La expresión (2.7) representa el espectro energético de las partículas, y resulta discreto, a menos que Ω=0.

CONCLUSIONES

En el campo gravitatorio externo del universo de Gödel con simetría cilíndrica se han hallado soluciones exactas de la ecuación del campo escalar y el espectro energético de las correspondientes partículas escalares, en dos casos: cuando el campo escalar esta sólo bajo la acción del campo gravitatorio externo y cuando el campo escalar interactúa con un campo electromagnético externo, el cual a su vez está dentro del campo gravitatorio externo.

En ambos casos, para el campo escalar se obtiene una ecuación generalizada de tipo hipergeométrico que, mediante un cambio de variables, es llevada a la ecuación de Gauss. La solución general de la ecuación de Gauss se escribe en forma de una superposición de dos funciones hipergeométricas linealmente independientes.

La exigencia de que la energía total del campo escalar sea finita hace que las funciones hipergeométricas degeneren en los polinomios de Jacobi, los cuales corresponden a un espectro discreto de valores propios y determinan, por ende, que el espectro energético de las partículas escalares resulte discreto.

Si consideramos la velocidad de rotación del universo igual a cero, entonces el espectro resulta continuo. Podemos, entonces, concluir que la rotación del universo produce la discretización del espectro energético de partículas escalares.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. Gödel K. An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation. Rev. Mod. Phys. 1949; 21: 447-450.

2. Brónikov K.A., Rybakov Y. P., Shikin G.N. Solitones Cilíndricos en el Universo de Gödel y su Estabilidad. Izvestiya vuzov Fizika 1991; 5: 24-29.

3. Ivanenko D.D., Korotkiy V.A., Obukhov Y. N. Escenario cosmológico del universo en rotación. Circular Astronómico 1986 Diciembre; (1473): 1-3.

4. Hawking S. W., Ellis G.F.R. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge University Press; 1973. pp. 187-190.

5. Leahy D. A. Scalar and neutrino field in the Gödel Universe. International Journal of Theoretical Physics 1982; 21(8/9): 703-753.

6. Hiscock W. A. Scalar perturbation in the Gödel universe. Phys. Rew. 1978; 17(6): 1497-1500.

7. Nikíforov A. F., Uvárov V.B. Funciones especiales de la física matemática. Moscú: Ciencia; 1978.

8. Bogoliúbov N.N., Shirkov D.V. Introducción a la teoría de campos cuantizados. Moscú: Ciencia; 1976.